Лекции 14-15 Интегральные уравнения. Метод вейвлет-Галеркина

Часто проблема поиска подходящего алгоритма – это проблема выбора правильного функционального базиса. Поясним сказанное на примерах.

Рассмотрим простое уравнение теплопроводности с периодическими граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$$u(0,t) = u(1,t), \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t)$$

и начальным условием $u(x,0) = \kappa(x)$. Пусть по каким-либо причинам необходимо решить данное уравнение численно. Явная разностная схема, очевидно, может быть легко распараллелена (геометрический параллелизм), но оно требует жестких ограничений на устойчивость. Неявные схемы приводят к необходимости решать систему линейных уравнений на верхнем слое с помощью метода периодической прогонки. Неявные схемы будут иметь хорошие свойства по устойчивости, но алгоритм не будет параллельным!

Вспомним из математического анализа определение преобразования Фурье. Для преобразования Фурье и обратного преобразования здесь и далее примем обычную в физике «симметризованную» форму (что, впрочем, не повлияет на характер выкладок). Итак, прямое преобразование Фурье есть

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-ikx)dx,$$

тогда обратное преобразование (если оно существует) будет выражаться формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\exp(ikx)dk.$$

Применим прямое преобразование Фурье по пространственной переменной к уравнению теплопроводности. Мы получим

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = -k^2 D\tilde{u} + \tilde{f}(k,t).$$

Более того, известно, что любая периодическая функция приближается своим рядом Фурье, так что обыкновенные дифференциальные уравнения для определения коэффициентов Фурье зависят только от счетного числа k. ОДУ для коэффициентов Фурье могут быть решены независимо. Осталось только понять, насколько параллельным является поиск преобразования Фурье функции правой части f.

УПРАЖНЕНИЕ Проанализировать с точки зрения параллельности алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ)

За все надо платить – получившейся ряд содержит бесконечное число членов! Если в пространственной области задача была *локализованной*, то в частотной области о локализации приходится говорить лишь в смысле скорости стремления коэффициентов Фурье (или функции от волнового числа) к нулю при стремлении волнового числа к бесконечности. Поясним сказанное на примере. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, |x|\le 1\\ 0, |x|>1\end{cases}.$$

Вычислим ее преобразование Фурье.

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-ikx)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\exp(-ikx)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-ik)}\exp(-ikx)\Big|_{-1}^{1}$$

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-ik)}2\frac{e^{-ik}-e^{ik}}{2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin k}{k}$$

Конечно, эту функцию следует дополнить по непрерывности в нуле.

В этом случае можно говорить о плохой локализации в частотной области (функция убывает достаточно медленно, как $1/k$). Обратное преобразование Фурье не существует в классическом смысле. Интеграл существует в смысле главного значения и приводит к правильному ответу и для обратного преобразования!

Такая плохая локализация является следствием негладкости начальной функции. Для более гладких объектов скорость стремления Фурье-образа к нулю будет гораздо большей.

Рассмотрим новый класс базисных функций. Завоевавших популярность в последнее время.

Определение 1. Будем называть функцию $\psi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вейвлетом, если выполнены следующие свойства.

1. Функция интегрируема по Лебегу и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx=0,$

2. Функция $|\psi(x)|$ интегрируема с квадратом и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx=1.$

Конечно, все интегралы понимаются как интегралы Лебега.

Очевидные свойства. Пусть $\psi(x):\Box \to \Box$ — вейвлет. Тогда $\psi(x-b)$ тоже вейвлет при любом действительном сдвиге b)

Пусть $\psi(x):\Box \to \Box$ — вейвлет. Тогда $\frac{1}{\sqrt{a}}\psi(x/a)$ тоже вейвлет при любом действительном растяжении a)

Доказательства этих свойств очевидны. Конечно, на практике используется только растяжение/сжатие только в действительное число раз!

Объединяя сказанное выше, заключаем, что если $\psi(x):\Box \to \Box$ — вейвлет, то ситема функций $\psi_{r,k}(x) = \frac{1}{2^{r/2}}\psi\left(\frac{x-2^r k}{2^r}\right)$ — система вейвлетов, порождаемая одной функцией (материнским вейвлетом).

Докажем ортогональность базиса из вейвлет-функций

Выше была доказана ортогональность базиса Хаара. Теперь докажем полноту данного базиса. Напомним, что базис образован материнским вейвлетом

$$\psi_{Haar} = \begin{cases} 1, \; x \in [0, 0.5) \\ -1, \; x \in [0.5, 1] \\ 0, \quad x \in (-\infty, 0) \bigcup (1, \infty) \end{cases}$$

и счетным множеством порождаемых им функций

$$\psi_{r,k} = \frac{1}{2^{r/2}}\psi_{Haar}\left(\frac{t-2^r k}{2^r}\right), \quad r,k \in \Box.$$

Покажем, что любая функция f из пространства L^2 может быть представлена в виде конечной линейной комбинации базисных функций (*вейвлетного полинома*). Для этого рассмотрим множество всех функций таких, что а) $f \equiv 0, \; |x| > 2^m$ и б) рассматриваемая функция является ступенчатой функцией, постоянной на интервалах длины 2^{-n}. Эти интервалы обозначаются $I_{-n,k}$. Рассмотрим последовательность вейвлетных полиномов

$$\psi_r = \sum_{j=-n+1}^{r}\sum_k c_{j,k}\psi_{j,k}$$

Определим $\psi_{-n} = 0$ и невязку $rf_r = f - \psi_r$. Тогда невязка начального приближения будет $rf_{-n} = f - \psi_{-n} = f$.

Далее следующие полиномы будем строить с помощью метода математической индукции. Пусть построен нужный полином и известна невязка. Значение невязки на интервале $I_{r,k}$ есть среднее значение функции на этом интервале, обозначим его $f_{r,k}$. Определим величины при переходе от r к $r+1$.

$$\delta_{r+1,k} = \frac{f_{r,2k} - f_{r,2k+1}}{2},$$

$$f_{r+1,k} = \frac{f_{r,2k} + f_{r,2k+1}}{2}.$$

Положим

$$c_{r+1,k} = 2^{(r+1)/2}\delta_{r+1,k}$$

$$\psi_{r+1} = \psi_r + \sum_k c_{r+1,k}\psi_{r+1,k}$$

$$rf_{r+1} = f_{r+1,k}$$

Сделаем $n+m$ подобных шагов. Напомним, что константа m фактически определяет размер носителя функции.

Мы получили

$$f = \psi_m + rf_m = \sum_{j=-n+1}^{m}\sum_k c_{j,k}\psi_{j,k} + rf_m,$$

причем остаток rf_m после выполнения такого построения постоянен на интервалах $I_{m,-1}$ и $I_{m,0}$ и остаток равен среднему значению $A = \bar{f}\left\{\left[-2^m, 0\right]\right\}$ и $B = \bar{f}\left\{\left[0, 2^m\right]\right\}$. В силу того, что эти интервалы захватывают носитель функции, эти средние отличны от ноля. (До этого момента все рассматриваемые коэффициенты, если соответствующий интервал «вылезал» за пределы носителя, получались нулевыми!)

Для необработанной невязки продолжим вычислять коэффициенты разложения вейвлет-полинома. Сделаем еще р шагов. Получим

$$rf_m = \sum_{j=m+1}^{m+p}\sum_k c_{j,k}\psi_{j,k} + rf_{m+p},$$

причем функция постоянна только на двух интервалах $I_{m+p,-1}$ и $I_{m+p,0}$ и остаток равен среднему значению на соответствующем интервале $f_{m+p,-1} = 2^{-p}A = \bar{f}\left\{\left[-2^{m+p}, 0\right]\right\}$ и $f_{m+p,0} = 2^{-p}B = \bar{f}\left\{\left[0, 2^{m+p}\right]\right\}$.

Тогда

$$\left\|rf_{m+p}\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|rf_{m+p}\right|^2 dx = 2^{m+p}2^{-2p}(|A|^2 + |B|^2)$$

Последнее выражение, очевидно, можно сделать сколь угодно близким к нулю при сколь угодно больших значениях p.

Но отсюда сразу следует полнота системы функций.

Отметим, что доказательство полноты – не только существенный математический факт. Доказательство получилось *конструктивным*, то есть одновременно дающим алгоритм вычисления коэффициентов обобщенного полинома (вейвлет – полинома). Обсудим детали данного алгоритма.

1. «Не все йогурты одинаково полезны». Коэффициенты обобщенного полинома неравноправны, часть из них необходима, чтобы приблизить функцию, а часть необходима для того, чтобы сделать невязку сколь угодно малой. Имеем фактически два набора коэффициентов одного и того же вейвлет-полинома – аппроксимирующие или интерполирующие коэффициенты и коэффициенты уточняющие (детализационные).

2. При вычислении коэффициентов алгоритм может быть достаточно легко разбит на фрагменты, каждый из которых может выполняться независимо своим исполнителем. Действительно, все интервалы, на которых ведутся вычисления, не пересекаются и не перекрываются, на наборах интервалов, расположенных в разных частях отрезка, на котором строится обобщенный вейвлет-полином, вычисления можно проводить одновременно. Заметим также, что алгоритм вычисления такого преобразования напоминает алгоритм редукции при решении уравнения теплопроводности.

3. Алгоритм работы с вейвлет-разложением в некотором смысле противоположен алгоритму работы с преобразованиями Фурье. Разложение по вейвлетному базису начинается с самых мелких масштабов, от них происходит «подъем» к масштабам большим. При работе с Фурье – разложениями анализ начинается с самых малых частот (самые большие длины волн) и прекращается при достижении заданной (большой) частоты.

4. Алгоритм получается БЫСТРЫМ.

Задание для самостоятельного решения. Выполнить асимптотический анализ построения интерполяционного вейвлет-полинома.

Был рассмотрен только базис Хаара. Это самый простой базис, функции негладкие. Из-за негладкости имеется плохая локализация Фурье-образа этого вейвлета в частотной области, есть проблемы и в алгоритмах многомасщтабного анализа. Но все вейвлетные базисы устроены подобным образом и для вычисления коэффициентов обобщенного полинома получается похожий алгоритм (только вместо тривиальных вычислений $\delta_{r+1,k} = \dfrac{f_{r,2k} - f_{r,2k+1}}{2}$,

$$f_{r+1,k} = \frac{f_{r,2k} - f_{r,2k+1}}{2}.$$

будут стоять гораздо более сложные функции. Но это не влияет на результаты асимптотического анализа алгоритма!

Непрерывное вейвлет-преобразование.

Определение. При фиксированном вейвлете функция

$$Wf(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx$$

называется непрерывным вейвлет-преобразованием.

На практике ось растяжений (a) обычно бывает вертикальной осью, ось сдвигов – горизонтальная ось.

Упражнение. В качестве материнского вейвлета выбран вейвлет Хаара. Какой «физический» смысл имеет непрерывное вейвлет-преобразование?

Пример гладкой базисной функции

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} (1 - x^2) \exp(-x^2/2)$$

Упражнение. Доказать, что для рассматриваемой функции $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = 1$

Упражнение 2. Найти преобразование Фурье данной функции.

Пример – решение интегрального уравнения.

Некорректная задача. Переопределенная система. Распараллеливание метода наименьших квадратов (опять перемножение матриц).