

# Параллельные вычисления в томографии

Алгебраические методы  
вычислительной томографии. Задача  
вычислительной томографии в  
дискретной форме

### ***Задача вычислительной томографии в дискретной форме.***

В отличие от интегральных методов, в которых дискретизация производится только на конечной стадии при численной реализации алгоритма, полученного в непрерывной форме, в алгебраических методах дискретизация осуществляется уже в начале рассмотрения, и дальнейшее описание проводится только в дискретной форме [35]. При этом задача вычислительной томографии сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) или реже к системе нелинейных уравнений.

Рассмотрим дискретную форму на примере ЭВТ (рис. 10). Пространственная область, в которой находится искомое двумерное распределение источников излучения  $s(x,y)$ , покрывается сеткой из элементарных ячеек, пронумерованных в произвольном порядке. Хотя на форму элементарных ячеек не накладывается никаких ограничений, обычно их полагают квадратными.

Как и раньше, будем считать, что область, в которой распределены источники излучения, целиком расположена в области поглощения излучения, характеризующейся коэффициентом ослабления  $\mu$ . Определению в алгебраических методах подлежит вектор-столбец  $\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  - дискретная версия искомого распределения:

$$x_i = \iint_{\Omega_i} s(x, y) dx dy, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

(176)

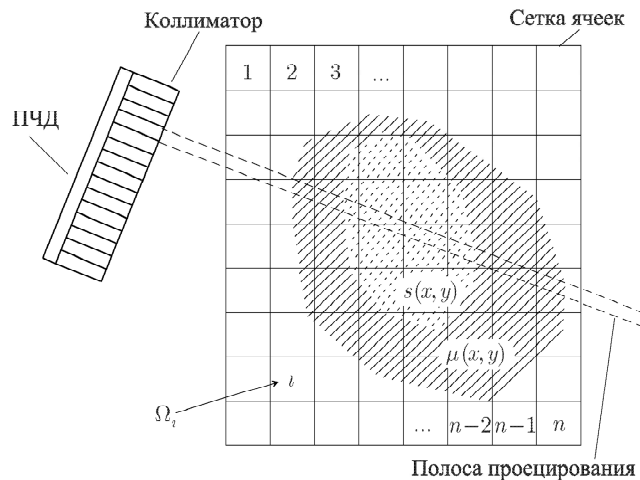


Рис. 10. Геометрия измерений при использовании алгебраических методов в ЭВТ

где интегрирование ведётся по  $i$ -й элементарной ячейке  $\Omega_i$ . Обычно полагают, что источник излучения, характеризующийся величиной  $x_i$ , расположен в центре элементарной ячейки, либо распределён равномерно по ячейке. Очевидно, чем меньше размеры элементарной ячейки, тем точнее дискретная версия  $\bar{x}$  описывает искомое распределение  $s(x, y)$ . Однако при этом возрастает количество элементарных ячеек, что приводит к возрастанию вычислительных затрат.

Таким образом, задача вычислительной томографии в дискретной форме может быть записана в следующем виде:

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{y} + \vec{e}, \quad (177)$$

где  $\vec{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  - вектор результатов измерений (отсчёты проекций);  $\vec{e}^T = (e_1, e_2, \dots, e_m)$  - вектор погрешностей измерений;  $\hat{A} = (a_{ij}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$  - матрица, элемент  $a_{ij}$  которой описывает вклад  $j$ -й компоненты  $x_j$  в  $i$ -е измерение  $y_i$ . Часто полагают  $\vec{e} \equiv \vec{0}$ .

В первом приближении для элементов матрицы  $\hat{A}$  можно записать

$$a_{ij} = \frac{\Delta}{4\pi l_{ij}^2} e^{-\mu l_{ij}} b_{ij}, \quad (178)$$

где  $l_{ij}$  — расстояние от  $j$ -й элементарной ячейки до детектора в  $i$ -м измерении;  $\Delta$  - площадь элементарной ячейки детектора;  $b_{ij}$  принимает значения 0 или 1 в зависимости от того, попадает ли  $j$ -я элементарная ячейка в поле зрения ячейки детектора, соответствующей  $i$ -му измерению. Сразу же отметим, что и геометрическое ослабление, и физическое ослабление в алгебраической схеме учитываются почти тривиально.

Погрешность измерений  $\vec{e}$  содержит как систематическую часть, определяемую адекватностью дискретной версии  $\vec{x}$  искомому распределению  $s(x,y)$  и точностью определения элементов матрицы  $\hat{A}$ , так и случайную, зависящую от вероятностного характера процессов испускания квантов излучения и их регистрации, а также от случайных помех, накладывающихся на каждое измерение.

В томографии неприменимы прямые методы решения СЛАУ (1.177) по следующим причинам:

- 1) большая размерность системы (матрица  $\hat{A}$  содержит  $10^8 \div 10^{10}$  элементов, хотя элементов, отличных от нуля, менее 1%);
- 2) плохая обусловленность матрицы системы, что делает процедуру обращения матрицы  $\hat{A}$  неустойчивой - отражение общей некорректности задачи томографической реконструкции;
- 3) погрешности в определении элементов матрицы  $\hat{A}$  в измеренных данных, приводящие к недопустимым отклонениям точного решения от истинного;
- 4) использование неквадратных матриц системы, как переопределённых, так и недоопределённых;
- 5) трудность учёта в прямых методах априорной информации, такой как неотрицательность и максимальное значение компонент искомого вектора  $\vec{x}$ , пространственные границы распределения  $s(x, y)$  и др.

Таким образом, в томографии применяют, как правило, итерационные методы решения СЛАУ [17, 44]. Хотя интегральные методы значительно превосходят итерационные методы по скорости обработки и вычислительным затратам, алгебраические методы позволяют учесть любые геометрии измерений, различные физические процессы и априорную информацию. При этом часто используются и не всегда очевидные искусственные приёмы, такие как многократная нормировка приближений, селективное сглаживание, вариация релаксационного множителя, изменение порядка следования уравнения в системе, выбор начального приближения и т.д.

Многие итерационные схемы объединяются следующей формулой:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \tau_k \hat{H}_k \left[ \vec{y} - \hat{A} \vec{x}^{(k)} \right], \quad (179)$$

где  $\vec{x}^{(k)}$  —  $k$ -е приближение к решению СЛАУ;  $\vec{x}^{(k+1)}$  —  $(k+1)$ -е приближение к решению СЛАУ;  $\tau_k$  последовательность вещественных чисел (релаксационных множителей);  $\hat{H}_k$  последовательность невырожденных матриц.

На каждой итерации необходимо учитывать априорные ограничения на искомое решение. Вводя оператор априорных ограничений  $C\{\dots\}$ , можно записать [73]:

$$\vec{x}^{(k)} = C\{\vec{x}^{(k)}\}. \quad (180)$$

Хотя для некоторых видов ограничений оператор  $C\{\dots\}$  выразить аналитически бывает сложно, алгоритмически все виды априорной информации и эвристические трюки реализуются, как правило, достаточно просто.

Подставляя (180) в (179), получим

$$\vec{x}^{(k+1)} = C\{\vec{x}^{(k)}\} + \tau_k \hat{H}_k [\vec{y} - \hat{A}C\{\vec{x}^{(k)}\}], \quad (181)$$

или, более коротко,

$$\vec{x}^{(k+1)} = F\{\vec{x}^{(k)}\}, \quad (182)$$

где  $F\{\dots\}$  - итерационный оператор.

Будем считать, что решение  $\vec{x}$ , а также все промежуточные приближения  $\vec{x}^{(k)}$  принадлежат полному нормированному линейному пространству с нормой, определяемой выражением

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (183)$$

Если для всех  $\vec{V}$  и  $\vec{W}$ , принадлежащих некоторому замкнутому подпространству пространства решений

$$\left| F\{\vec{V}\} - F\{\vec{W}\} \right| \leq r \left| \vec{V} - \vec{W} \right| \quad (184)$$

и

$$0 \leq r < 1, \quad (185)$$

то оператор  $F\{\dots\}$  называется сжимающим оператором, для которого известна теорема [74] о том, что существует, и притом только одна, точка  $\vec{x}$ , называемая неподвижной, для которой

$$F\{\vec{x}\} = \vec{x}. \quad (186)$$

Из (184) следует

$$\left| \vec{x} - \vec{x}^{(k)} \right| \leq \frac{r^{k+1}}{1-r} \left| \vec{x} - \vec{x}^{(0)} \right|, \quad (187)$$

т. е. последовательность итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии к единственному решению

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \vec{x} - \vec{x}^{(k)} \right| = 0. \quad (188)$$



Релаксационный множитель в (181) используют для того, чтобы оператор  $F\{\dots\}$  стал сжимающим, а также для оптимизации скорости сходимости.

Рассмотренная ситуация является идеальной. При учёте вектора погрешностей  $\vec{e}$  для недоопределённых, для переопределённых и несовместных СЛАУ усложняются само понятие решения системы, определение итерационного процесса и его сходимости.

Для решения томографических СЛАУ использовались как методы, разработанные ранее в вычислительной математике, так и методы, разработанные непосредственно в томографических целях, в которых учитывается специфика получения проекционных данных. В качестве примера алгоритмов первой группы можно упомянуть широко известные метод простой итерации [39] и метод скорейшего спуска [37], а в качестве примера алгоритмов второй группы - метод ART (algebraic reconstruction technique) [43, 44]; SIRT (simultaneous iterative reconstruction technique) [45] и ILST (iterative least square technique) [75]. Существует также целая группа алгоритмов, основанная на формуле апостериорной вероятности Байеса [45, 76].