

Параллельные вычисления в томографии

Лекция 8 - Метод Фурье-синтеза для ЭВТ.

Метод одномерной фильтрации (метод
фильтрованных обратных проекций) для
ЭВТ. Аппаратная функция.

Экспоненциальное преобразование Абеля.

Метод одномерной фильтрации (метод фильтрованных обратных проекций) для ЭВТ.

Рассмотрим обобщение метода одномерной фильтрации на экспоненциальное преобразование Радона [9,10]. Запишем выражение для фильтрованной проекции $f(x, \vartheta)$ в следующем виде:

$$f(\xi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi_0, \vartheta) h_1^{\mu}(\xi - \xi_0) d\xi_0. \quad (145)$$

В этом выражении одномерная функция ядра свёртки $h_1^{\mu}(x)$ пока неизвестна и подлежит определению. На втором шаге мы должны произвести операцию обратного проецирования, т. е. найти обратную проекцию $b(x, y, \vartheta)$, модифицированную аналогично (113), т.ч.

$$b(x, y, \vartheta) = f(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)}, \quad (146)$$

и получить суммарное изображение, которое и должно быть оценкой искомого распределения $s(x, y)$:

$$s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(x, y, \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\vartheta. \quad (147)$$

Подставляя выражение для обратной проекции $b(x, y, v)$ и для проекции $f(x, J)$, получим

$$s(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1^\mu((x - x_0) \cos \vartheta + (y - y_0) \sin \vartheta) e^{-\mu(-(x - x_0) \sin \vartheta + (y - y_0) \cos \vartheta)} d\vartheta, \quad (148)$$

т. е. должно выполняться соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1^\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\vartheta = \delta(x) \delta(y). \quad (149)$$

Как и в ТВТ, попробуем найти фурье-образ $H_1^m(x)$ этой функции. Запишем выражения для $h_1^m(x)$ через обратное одномерное преобразование Фурье от $H_1^m(x)$, а для $\delta(x)\delta(y)$ через обратное двумерное преобразование Фурье:

$$h_1^m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1^m(x) e^{i x \xi} dx, \quad (150)$$

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho(x \cos \psi + y \sin \psi)} \rho d\rho d\psi. \quad (151)$$

Подставим полученные выражения в равенство (149), одновременно предположив, что $H_1^m(-x) = H_1^m(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} H_1^m(x) e^{i\chi(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)} e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} dx d\vartheta = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho(x \cos \psi + y \sin \psi)} \rho d\rho d\psi. \end{aligned} \quad (152)$$

Перейдём от декартовых координат (x, y) к полярным координатам (r, φ) :

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} H_0^\mu(\chi) e^{\mu r \sin(\vartheta - \varphi) + i\chi r \cos(\vartheta - \varphi)} d\chi d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\psi - \varphi)} \rho d\rho d\psi, \quad (153)$$

и проинтегрируем по J и y , воспользовавшись связью между модифицированной функцией Бесселя нулевого порядка $I_0(x)$ и функцией Бесселя нулевого порядка

$J_0(x)$:

$$I_0(x) = J_0(ix), \quad (154)$$

а также известным соотношением

$$\int_0^{2\pi} e^{a \sin x + ib \cos x} dx = 2\pi I_0(\sqrt{a^2 + b^2}). \quad (155)$$

В результате получим

$$\frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\mu} H_1^{\mu}(\chi) I_0(r\sqrt{\mu^2 - \chi^2}) d\chi + \int_{\mu}^{+\infty} H_1^{\mu}(\chi) J_0(r\sqrt{\chi^2 - \mu^2}) d\chi \right] = \int_0^{+\infty} J_0(r\rho) \rho d\rho. \quad (156)$$

Для выполнения полученного равенства достаточно взять $H_1^{\mu}(x)$ в виде (рис. 9)

$$H_1^{\mu}(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\chi| < \mu \\ \frac{1}{2\sqrt{2\chi}} |\chi| & \text{при } |\chi| \geq \mu. \end{cases} \quad (157)$$

Тогда первое слагаемое в левой части равенства исчезнет, а второе после замены переменных совпадёт с правой частью.

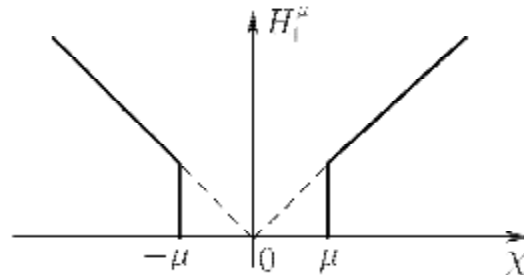


Рис. 9. Фурье-образ функции фильтра в методе одномерной фильтрации для ЭВТ

Таким образом, функция ядра в фурье-пространстве даётся формулой (157), а для функции ядра в координатном пространстве можно дать интегральное

представление:

$$h_1^\mu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1^\mu(\chi) e^{i\chi\xi} d\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{+\infty} \chi \cos(\chi\xi) d\chi. \quad (158)$$

Так же, как и в ТВТ, можно ввести аподизирующую функцию:

$$h_1^\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{-\infty} \chi \cos(\chi\xi) A_1(\chi) d\chi. \quad (159)$$

Рассмотрим, например, аналог фильтра Рамачандрана и Лакшмина-раянана с аподизирующей функцией

$$A_1(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \chi \leq \chi_0 \\ 0 & \text{при } \chi > \chi_0. \end{cases} \quad (160)$$

Подставляя эту функцию в выражение для фильтра, получим

$$h_1^\mu(\xi) = \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left[\text{sinc}(\chi_0\xi) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\chi_0\xi}{2}\right) \right] - \frac{\mu^2}{2\pi} \left[\text{sinc}(\mu\xi) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\mu\xi}{2}\right) \right]. \quad (161)$$

Теперь найдём дискретное представление фильтра. Дискретным значениям $p(x_n, J) = p(n\Delta x, J)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствуют дискретные отсчёты $h_1^m(x_n) = h_1^m(n\Delta x)$.

По теореме Котельникова для предотвращения потери информации мы должны снимать отсчёты с дискретностью $\Delta x = p / x_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 h_1''(n\Delta\xi) &= \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}(\chi_0 n\Delta\xi) - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\chi_0 n\Delta\xi}{2}\right) \right] - \\
 &\quad - \frac{\mu^2}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}(\mu n\Delta\xi) - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\mu n\Delta\xi}{2}\right) \right] = \\
 &= \begin{cases} \frac{\chi_0^2 - \mu^2}{4\pi}, & n = 0, \\ -a_{2k}, & n = 2k, \quad k = +1, +2, \dots, \\ -\frac{\chi_0^2}{\pi^2 \nu^2} - a_{2k-1}, & n = 2k + 1, \quad k = 0, =1, =2, \dots, \end{cases} \\
 \text{где } a_n &= \frac{\mu^2}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi\mu}{\chi_0}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n\pi\mu}{2\chi_0}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{162}$$

В отличие от ТВТ дискретное представление этого фильтра имеет более сложный вид.

Аппаратная функция.

При исследовании и сравнении методов вычислительной томографии часто используют аппаратную функцию (PSF - point spread function), представляющую собой изображение точечного источника. Если не учитывать искажающие свойства реальной измерительной системы и использовать метод, обеспечивающий точное восстановление, то аппаратная функция, естественно, будет представлять собой δ -функцию Дирака. Тем не менее для реализации любого метода необходимо, как минимум, вводить аподизирующую функцию. С учётом этого обстоятельства аппаратная функция уже не будет иметь идеальную форму δ -функции. Более того, получающаяся форма аппаратной функции может служить основанием для выбора аподизирующей функции.

Найдём связь аппаратной функции $\varepsilon(x, y)$ с аподизирующей функцией $A_1(x)$. Из выражения

(148) по определению аппаратной функции получим

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1^\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi e^{i\chi(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)} A_1(\chi) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\chi d\vartheta. \end{aligned} \quad (163)$$

Повторяя выкладки, сделанные при выводе выражения для функции фильтра, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) &= \varepsilon(\sqrt{x^2 + y^2}) = \varepsilon(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{+\infty} \chi A_1(\chi) J_0(r\sqrt{\chi^2 - \mu^2}) d\chi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} z A_1(\sqrt{z^2 + \mu^2}) J_0(rz) dz, \end{aligned} \quad (164)$$

т. е. аппаратная функция представляет собой преобразование Ханкеля от аподизирующей функции.

Для простейшей аподизирующей функции

$$A_1(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \chi \leq \chi_0 \\ 0 & \text{при } \chi \geq \chi_0 \end{cases} \quad (165)$$

можно найти явный вид аппаратной функции:

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{+\infty} \chi A_1(\chi) J_0(r\sqrt{\chi^2 - \mu^2}) d\chi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{\chi_0} \chi J_0(r\sqrt{\chi^2 - \mu^2}) d\chi = \frac{\sqrt{\chi_0^2 - \mu^2}}{2\pi r} J_1(r\sqrt{\chi_0^2 - \mu^2}). \end{aligned} \quad (166)$$

Наоборот, задавая вид аппаратной функции, можно найти соответствующую аподизирующую функцию. Например, гауссовой аппаратной функции

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} \quad (167)$$

соответствует аподизирующая функция

$$A_1(\chi) = \sqrt{2\pi}\sigma^2 e^{-\sigma^2(\chi^2 - \mu^2)/2}. \quad (168)$$

Экспоненциальное преобразование Абеля.

Для радиально-симметричной функции $s(x, y) = s(\sqrt{x^2 + y^2}) = s(r)$ экспоненциальное преобразование Радона $p(x, J)$ превращается в экспоненциальное преобразование

Абеля $p(x)$:

$$\begin{aligned}
 p(\xi) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} s(r) \delta(\xi - r \cos \varphi) e^{\mu r \sin \varphi} r dr d\varphi = \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{2s(r) \operatorname{ch}(\mu\sqrt{r^2 - \xi^2})}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \eta(r - |\xi|) r dr = \int_{|\xi|}^{+\infty} \frac{2s(r) \operatorname{ch}(\mu\sqrt{r^2 - \xi^2})}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r dr.
 \end{aligned}
 \tag{169}$$

Выведем обратное экспоненциальное преобразование Абеля непосредственно из обратного экспоненциального преобразования Радона. В соответствии с методом фильтрованных обратных проекций

$$s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \vartheta) h_1^\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi) e^{-\mu(-x \sin \vartheta - y \cos \vartheta)} d\xi d\vartheta.
 \tag{170}$$

Функцию фильтра $h_1^m(\bullet)$, так же как и в ТВТ, можно записать через обобщённые функции, используя её интегральное представление (158):

$$\begin{aligned}
 h_1^m(\xi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi [1 - \eta(\mu - |\chi|)] e^{i\chi\xi} d\chi = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \wp \frac{1}{\xi^2} - \frac{\mu^2}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}(\mu\xi) - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\mu\xi}{2}\right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{171}$$

Тогда обратное экспоненциальное преобразование Радона можно записать в форме Радона как

$$\begin{aligned}
 s(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \vartheta) \left\{ \frac{1}{2\pi} \wp \frac{1}{(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)^2} \right. \\
 &\quad - \frac{\mu^2}{2\pi} \operatorname{sinc}[\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)] + \\
 &\quad \times \left[\frac{\partial p(\xi, \vartheta)}{\partial \xi} \right] d\xi d\vartheta + \\
 &\quad + \frac{\mu^2}{4\pi} \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)}{2} \right] \left. \right\} e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\xi d\vartheta = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{v.p.} \frac{\cos[\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)]}{x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \xi} e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} \times
 \end{aligned}
 \tag{172}$$

В радиально-симметричном случае $p(x, J) = p(x)$ переходя в полярную систему координат, получим

$$\begin{aligned}
 s(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[\mu(r \cos \vartheta - \xi)]}{r \cos \vartheta - \xi} e^{\mu r \sin \vartheta} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi d\vartheta = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{\cos[\mu(r \cos \vartheta - \xi)]}{r \cos \vartheta - \xi} e^{\mu r \sin \vartheta} d\vartheta \right] \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{173}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{\cos[\mu(r \cos \vartheta - \xi)]}{r \cos \vartheta - \xi} e^{\mu r \sin \vartheta} d\vartheta = \\ = \frac{(-2\pi) \cos(\mu \sqrt{\xi^2 - r^2})}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta(|\xi| - r) \text{sign}(\xi). \end{aligned} \quad (174)$$

Тогда окончательно получим обратное экспоненциальное преобразование Абеля

В ВИДЕ

$$\begin{aligned} s(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\cos(\mu \sqrt{\xi^2 - r^2})}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta(|\xi| - r) \text{sign}(\xi) \right] \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{\cos(\mu \sqrt{\xi^2 - r^2})}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (175)$$