

Параллельные вычисления в томографии

Лекция 5 - Эмиссионная вычислительная томография и экспоненциальное преобразование Радона. Круговая геометрия измерений в ЭВТ. Обратное проецирование в ЭВТ.

Излучение точечного источника.

Перейдём к рассмотрению эмиссионной вычислительной томографии (ЭВТ) [11, 47]. Пусть точечный источник излучает в телесный угол 4π с интенсивностью I_0 в веществе с распределением линейного коэффициента ослабления $\mu(x)$ вдоль прямой, соединяющей источник с небольшой площадкой $\Delta\sigma$, наклонённой под углом φ к этой прямой (рис. 7).

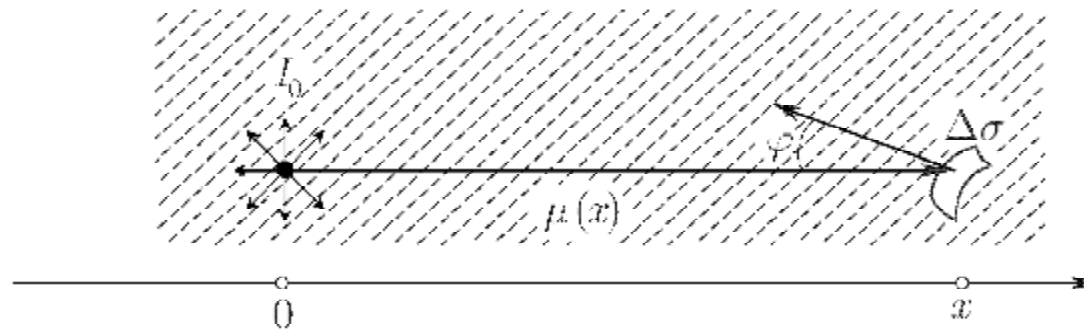


Рис. 7. Излучение точечного источника

Тогда для интенсивности $I(x)$, приходящейся на площадку $\Delta\sigma$, напишем

$$I(x) = I_0 \frac{1}{4\pi x^2} \exp \left\{ - \int_0^x \mu(\xi) d\xi \right\} \cos \varphi \Delta\sigma. \quad (98)$$

Так как в эмиссионной томографии, в отличие от трансмиссионной, расстояние от источника излучения до детектора является переменным, необходимо в явном виде учесть геометрическое ослабление излучения (фактор $1/x^2$). Кроме того, учтём ослабление излучения веществом среды на пути от источника до детектора, а также наклон площадки детектора излучения (фактор $\cos \varphi$). Таким образом, для вывода основного уравнения ЭВТ необходимо учесть, по крайней мере, четыре основных фактора: пространственное распределение источника излучения, геометрическое ослабление, ослабление излучения в веществе и наклон площадки детектора.

Круговая геометрия измерений в ЭВТ.

Рассмотрим задачу восстановления двумерного распределения источников излучения $s(x, y)$. Без ограничения общности можно считать, что область, в которой распределены источники излучения, целиком расположена в области поглощения излучения, характеризующейся функцией распределения коэффициента ослабления $\mu(x, y)$ (рис. 8).

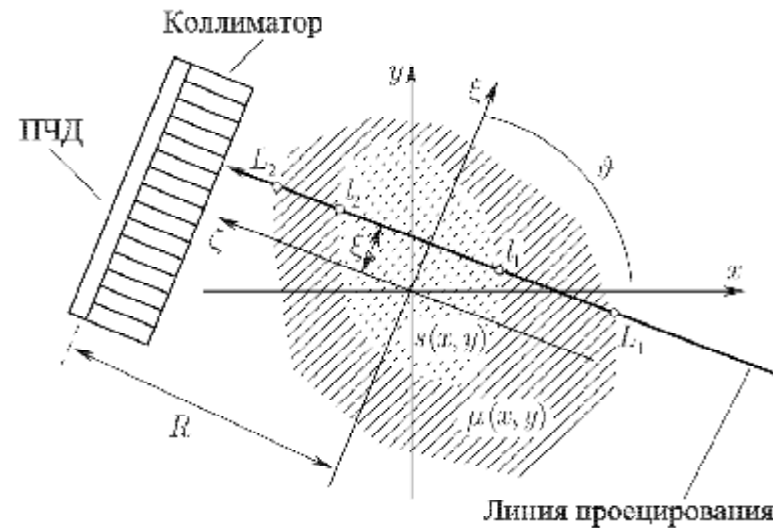


Рис. 8. Круговая геометрия измерений в ЭВТ

Процесс измерений выглядит следующим образом. Позиционно-чувствительный детектор (ПЧД) (например, гамма-камера, если регистрируется гамма-излучение), снабжённый многоканальным коллиматором с параллельными каналами, вращается вокруг объекта по окружности радиуса R . При этом за счёт коллиматора каждый элемент ПЧД регистрирует кванты излучения, испущенные источниками, лежащими только на линии проецирования, перпендикулярной детектору и проходящей через этот элемент.

Набор отсчётов, зафиксированных элементами ПЧД, определяет проекцию. Поскольку ПЧД, как правило, является двумерным, берутся либо только отсчёты тех элементов ПЧД, которые лежат в интересующей нас плоскости сечения объекта, либо восстанавливается сразу трёхмерное распределение в наборе независимых параллельных плоскостей, тогда используются все отсчёты ПЧД. Затем система "Коллиматор-Детектор" поворачивается относительно объекта на некоторый угол ν , и снимается новый набор отсчётов, определяющий следующую проекцию. Такие измерения повторяются, пока система "Коллиматор-Детектор" не повернётся на угол 2π . По полученному набору одномерных проекций (для одной секущей плоскости в объекте) необходимо восстановить двумерное распределение источников излучения $s(x, y)$.

Поскольку система "Коллиматор-Детектор" вращается вокруг объекта, такая схема измерений, как и в ТВТ, называется круговой геометрией измерений, а т.к. используется коллиматор с параллельными каналами, обеспечивающий параллельность линий проецирования, проекции называют параллельными проекциями.

Обозначим через $s_j(x, V)$ распределение источников излучения в системе координат (x, V) , повернутой относительно неподвижной системы координат (x, y) на угол ϑ , а через $m_j(x, V)$ распределение линейного коэффициента ослабления в этой же системе координат:

$$s_{\vartheta}(\xi, \zeta) = s(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) = \\ = s(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta), \quad (99)$$

$$\mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) = \mu(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) = \\ = \mu(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta). \quad (100)$$

В частности, $s_{J=0}(x, V) = s(x, y)$ и $m_{J=0}(x, V) = m(x, y)$. Тогда для интенсивности $p(x, J)$ излучения, прошедшего через объект, т.е. для проекции, получим

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{s_{\vartheta}(\xi, \zeta)}{4\pi(R - \zeta)^2} \exp \left\{ - \int_{\zeta}^{L_2} \mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) d\zeta \right\} d\zeta. \quad (101)$$

При этом учтено, что линия проецирования в точках $l_1 = l_1(x, J)$ и $l_2 = l_2(x, J)$ пересекает область, в которой распределены источники излучения, а в точках $L_1 = L_1(x, J)$ и $L_2 = L_2(x, J)$ пересекает область, в которой распределено вещество, поглощающее излучение.

Сравним влияние геометрического ослабления и ослабления излучения в веществе. Предположим, что (для данной проекции) $s_j(x, V) = C = const$. Рассмотрим сначала геометрическое ослабление. Тогда, пренебрегая ослаблением излучения в веществе, т. е. полагая $m_j(x, V)$, получим

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{C}{4\pi(R - \zeta)^2} d\zeta = \frac{C(\ell_2 - \ell_1)}{4\pi(\ell_2 - \ell_1)(\ell_2 - \ell_1)}. \quad (102)$$

В то же время, если не учитывать зависимость фактора геометрического ослабления от ν получим

$$\bar{p}(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{C}{4\pi R^2} d\zeta = \frac{C(\ell_2 - \ell_1)}{4\pi R^2}. \quad (103)$$

Примем $R = 25$ см и $(-l_1)=l_2= 8$ см (такие размеры характерны для получения томограммы головы человека). Тогда

$$\frac{|p(\xi, \vartheta) - \tilde{p}(\xi, \vartheta)|}{p(\xi, \vartheta)} = \frac{R^2 - (R - \ell_1)(R - \ell_2)}{R^2} \approx 0,102. \quad (104)$$

Таким образом, геометрическое ослабление вносит искажения на уровне 10%.

Заметим, что задача ЭВТ с учётом геометрического ослабления в круговой геометрии представляет собой нерешённую задачу в отличие от планарной

геометрии измерений и $m(x, y) \equiv 0$ [11].

Аналогично, рассматривая ослабление излучения в веществе, положим для простоты $m_j(x, V) = m = const$. Пренебрегая геометрическим ослаблением, получим

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\xi}^{\xi_2} C \exp \left\{ - \int_{\xi}^{\xi_2} \mu d\xi \right\} d\xi = \frac{C}{\mu} \left[e^{-\mu(L_2 - \xi_2)} - e^{-\mu(L_2 - \xi_1)} \right]. \quad (105)$$

Если же не учитывать ослабление излучения в веществе ($\mu = 0$), то

$$\tilde{p}(\xi, \vartheta) = \int_{\xi}^{\xi_2} C d\xi = C(\xi_2 - \xi_1). \quad (106)$$

Примем, как и раньше, $(-l_1) = l_2 = 8$ см и $L_2 = 8$ см, а также $\mu = 0,15$ см⁻¹ (такой коэффициент линейного ослабления соответствует тканям человека и

излучению Tc^{99m} с энергией $E_\gamma = 140$ кэВ). Тогда

$$\frac{p(\xi, \vartheta) - \tilde{p}(\xi, \vartheta)}{p(\xi, \vartheta)} = \frac{|e^{-\mu(L_2 - \xi_2)} - e^{-\mu(L_2 - \xi_1)} - \mu(\xi_2 - \xi_1)|}{e^{-\mu(L_2 - \xi_2)} - e^{-\mu(L_2 - \xi_1)}} \approx 1,637. \quad (107)$$

В этом случае получили в 16 раз большее различие. Следовательно, ослаблением излучения в веществе в отличие от геометрического ослабления пренебрегать нельзя.

Возвращаясь к исходному уравнению для проекции (101) и пренебрегая геометрическим ослаблением, перепишем его в следующем виде:

$$p(\xi, \theta) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} s_\theta(\xi, \zeta) \exp \left\{ - \int_{\zeta}^{\xi_2} \mu_\theta(\xi, \zeta) d\zeta \right\} d\zeta. \quad (108)$$

При этом мы отбросили несущественные постоянные множители. Заметим, что если $m(x, y) \equiv 0$, то уравнение (108) превращается в преобразование Радона относительно $s(x, y)$, к которому применимы методы, описанные в предыдущем разделе. Если же считать $m(x, y)$ неизвестной функцией, которая, так же как и $s(x, y)$, подлежит определению, то в такой постановке эта задача в интегральной форме становится слишком сложной для решения, т. к. нужно по одной двумерной функции $p(x, J)$ восстановить две двумерные функции $m(x, y)$ и $s(x, y)$.

Тем не менее в обзоре алгебраических методов вычислительной томографии будет рассмотрен один из подходов к решению этой задачи. Другая задача возникает, если считать $m(x, y)$ произвольной, но известной функцией. Такой случай возможен, если предварительно определить распределение коэффициента ослабления излучения, например методами трансмиссионной рентгеновской томографии. Решение и этой задачи возможно, по-видимому, только в алгебраической форме. Рассмотрим промежуточный случай, для которого найдено аналитическое решение. А именно будем считать, что известная функция $m(x, y)$ не произвольная, а постоянная, т.е. $m(x, y) \equiv m = const$. Тогда

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} s_{\vartheta}(\xi, \zeta) e^{-\mu(L_2 - \zeta)} d\zeta. \quad (109)$$

Учитывая, что конфигурация ослабляющей излучение области известна (как правило, этой областью является сам исследуемый объект), можно каждую проекцию скорректировать на постоянный для неё множитель e^{-ml_2} и уравнение

(109) примет вид

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{l_1}^{l_2} s_{\vartheta}(\xi, \zeta) e^{\mu\zeta} d\zeta. \quad (110)$$

Так как $s_j(x, V) = 0$ вне интервала $[l_1, l_2]$ пределы интегрирования можно продолжить до бесконечности:

$$\begin{aligned} p(\xi, \vartheta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\vartheta}(\xi, \zeta) e^{\mu\zeta} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) e^{\mu\zeta} d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta) e^{\mu\zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (111)$$

Выражение (111) называется экспоненциальным преобразованием Радона. С помощью δ -функции Дирака можно, так же как и для преобразования Радона, переписать экспоненциальное преобразование Радона (111) в виде

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x, y) \delta(\xi - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) e^{i(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} dx dy.$$

(112)

Исторически сначала были предложены приближенные методы коррекции ослабления излучения для уравнения (101), и только впоследствии были разработаны точные методы обращения экспоненциального преобразования Радона. Целью коррекции ослабления излучения является получение из исходных проекций таких скорректированных проекций, которые совпадали бы с проекциями, полученными в отсутствие поглощающей среды [11, 47].

Тогда, применяя к скорректированным проекциям методы, разработанные для обращения преобразования Радона, можно было бы восстанавливать искомое распределение источников излучения, не учитывая ослабление излучения в веществе. Большинство приближенных методы коррекции ослабления излучения основываются на использовании оппозитных проекции, т. е. проекции $p(x, J)$ и $p(-x, J+p)$. Не использующий оппозитных проекций метод корректирующей матрицы даёт, по-видимому, наилучшие результаты среди приближенных методов коррекции ослабления излучения в веществе [61].

Этот метод базируется на итерационном применении алгоритмов ТВТ с коррекцией ослабления излучения в каждой точке получаемых изображений с помощью множителя, полученного в предположении, что существует только один точечный источник в данной точке. Как показали исследования, такой итерационный процесс сходится очень быстро, за 1-2 итерации, правда не к истинному изображению, а к некоторому промежуточному изображению. Кроме того, применение корректирующей матрицы не только компенсирует ослабление излучения в веществе, но и снижает разброс результатов при плохой статистике измерений.