Лекция №1

Базовые понятия метода конечных элементов (МКЭ)

Метод конечных элементов (МКЭ)

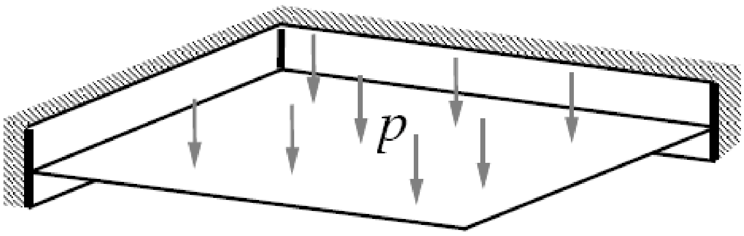
Метод конечных элементов (МКЭ) является в настоящее время одним из основных методов решения вариационных задач, в том числе – задач расчета напряженно-деформированного состояния конструкций. Основным достоинством его является возможность решения задач для области любой формы, в то время как аналитические решения могут быть получены только для задач с достаточно простой геометрией. Этот факт, а также появление целого ряда коммерческих программ, реализующих этот метод, сделали его основным инструментом инженера, выполняющего расчеты на прочность. Для правильного и эффективного применения таких программ необходимо как знакомство с их интерфейсом, так и хорошее знание математических основ метода и связанных с ними ограничений и источников ошибок (погрешностей) решения.

Метод конечных элементов (МКЭ) – метод решения вариационных задач. Чаще всего МКЭ представляет собой **метод Ритца или метод Бубнова-Галеркина; характерной чертой МКЭ является использование локальных базисных функций (локальных – т.е. отличных от нуля только на части области определения).**

Идея метода КЭ

Рассмотрим решение задачи с помощью МКЭ на примере:

Рассматриваемая конструкция



Определить напряжения и перемещения в упругой квадратной пластине, нагруженной равномерно распределенным давлением и защемленной по двум сторонам. Числовые данные: сторона пластины *a = 200 мм*; толщина h *= 2 мм*; давление *p = 100 000 Па*; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*; коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$

<u>Решение</u>

Задача отыскания напряжений и перемещений в тонкой жесткой пластине может быть сведена к задаче отыскания прогибов ***w*** срединной поверхности пластины, доставляющих минимум функционалу, представляющему собой сумму упругой энергии ***U*** пластины и взятой с обратным знаком работы внешних сил ***V*** на перемещениях ***w (x,y)***

$$\Pi = U + V =$$

$$= \frac{D}{2}\iint_F \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dF -$$

$$- \iint_F pw \cdot dF \, .$$

Здесь ***x, y*** – координаты в плоскости пластины, ***w = w (x, y)*** – прогиб, ***D*** – цилиндрическая жесткость $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$; интегрирование ведется по площади пластины.

Для поиска функции ***w***, доставляющей функционалу ***П*** минимум, воспользуемся методом Ритца: будем искать ***w (x, y)*** в виде

$$w = \sum_i C_i w_i(x, y), \quad i = 1, \ldots, N$$

где w_i ***(x, y)*** – базисные функции, C_i – неизвестные постоянные, тогда подставив данные базисные функции в функционал и сделав преобразования, получим:

$$\Pi = \sum_{i,j} k_{i,j} C_i C_j - \sum_i C_i f_i$$

Поскольку базисные функции w_i известны (мы сами их конструируем), интегралы могут быть вычислены, и, таким образом, k_{ij} и f_i являются известными числами (своими для каждого набора функций w_i).

Задача отыскания минимума функционала *П* сводится теперь к отысканию набора постоянных C_i, доставляющих минимум выражению:

$$\Pi = \sum_{i,j} k_{i,j} C_i C_j - \sum_i C_i f_i$$

Такой набор должен удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0\,, \quad i = 1, \ldots, N$$

что приводит к системе из ***N*** линейных уравнений с ***N*** неизвестными:

$$\sum_i k_{ij} C_i = f_j\,, \quad i, j = 1, \ldots, N$$

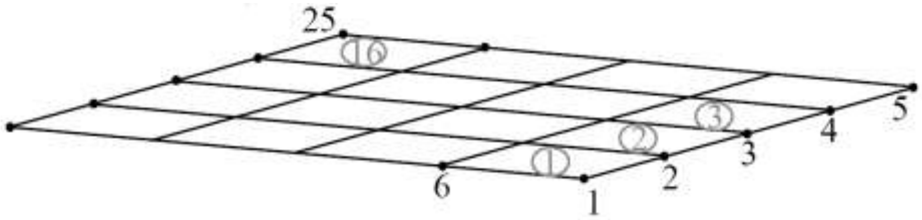
или в матричном виде

$$\mathbf{KC} = \mathbf{F}$$

Здесь ***C*** – вектор-столбец неизвестных постоянных (в литературе по методу конечных элементов их принято называть **степенями свободы**; в англоязычной – **degree of freedom** или **DOF**); ***F*** – вектор, называемый вектором нагрузок; матрица ***К***, связывающая нагрузки ***F*** и перемещения (характеризуемые вектором ***C***), называется матрицей жесткости (**stiffness matrix**).

Построим теперь базисные функции для рассматриваемой задачи. Для этого разобьем пластину на квадраты со стороной ***a/4***; назовем эти квадраты **конечными элементами** (**finite elements**), а их вершины **узлами** – **nodes** (в других задачах элементы могут иметь другой вид). Пронумеруем узлы и элементы (часть нумерации показана на рисунке; номера элементов обведены кружками).

Разбиение конструкции на конечные элементы



В качестве базисной функции w_1 выберем функцию, удовлетворяющую условиям

$$w_1(x,y):\begin{cases} w(x_1,y_1)=1 \\ w(x_i,y_j)=0 \quad i\neq 1,\ j\neq 1 \\ \exists\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{cases}$$

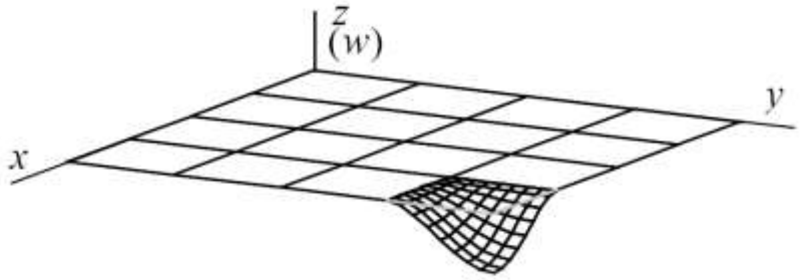
(x_i , y_i – координаты ***i***-го узла). Последнее требование – гладкости функции и существования соответствующих производных – необходимо для возможности вычисления интегралов в формуле

$$\varPi = U + V$$

Таким условиям удовлетворяет, например, изображенная на рисунке функция:

$$w_1(x,y)=\begin{cases}\left(1-2x^2+x^4\right)\left(1-2y^2+y^4\right) \text{ на элементе 1} \\ 0 \quad \text{на остальных конечных элементах}\end{cases}$$

Базисная функция w_1



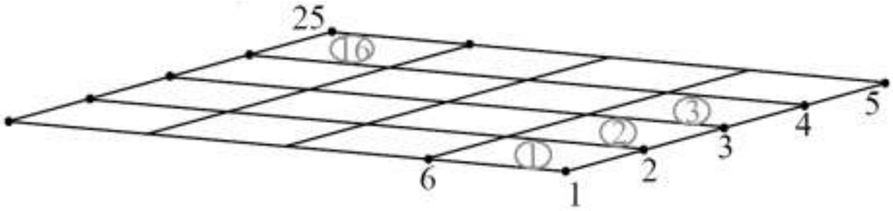
Аналогично строятся базисные функции, принимающие единичное значение в других узлах.

Построенные базисные функции обеспечивают симметричную ленточную структуру матрицы $\boldsymbol{K}$, удобную с точки зрения решения системы уравнений, они имеют еще одно преимущество: величины C_i приобретают простой физический смысл. Например,

$$w(x_1, y_1) = \sum C_i w_i(x_1, y_1) = C_1$$

т.е. C_i представляет собой перемещение i-го узла. Это облегчает анализ результатов и задание геометрических граничных условий.

В методе Ритца предполагается, что базисные функции удовлетворяют граничным условиям, наложенным на перемещения. В рассматриваемом примере это означает запрет использования базисных функций w_5, w_{10}, w_{15}, w_{20}, $w_{21} – w_{25}$ (перемещения в заделке равны нулю).



При автоматизированной реализации МКЭ в виде пакетов программ обычно поступают следующим образом: матрицу жесткости и столбец нагрузок формируют с учетом базисных функций во всех узлах, а уже затем в получившуюся систему уравнений подставляют величины Ci, известные из геометрических граничных условий (в данном случае C5=C10=C15=…=0). Количество неизвестных, оставшихся в системе после этой подстановки, называют числом активных степеней свободы задачи.

Определив из решения системы

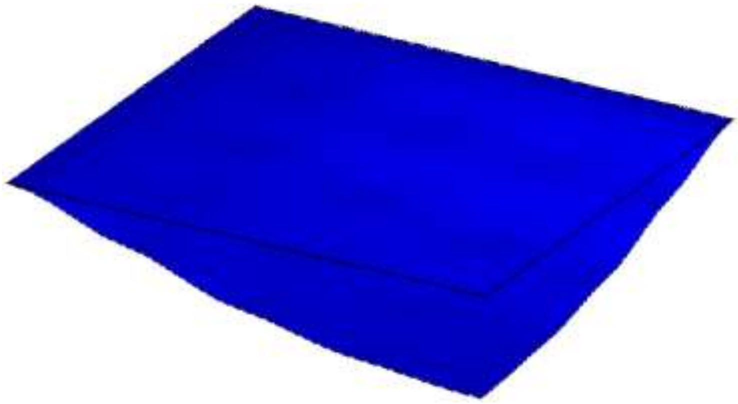
$$\mathbf{KC} = \mathbf{F}$$

величины C_i, в соответствии с

$$w = \sum_i C_i w_i(x, y), \quad i = 1, \ldots, N$$

восстановим всю картину перемещений.

Деформированное состояние конструкции (тонкой линией показано начальное состояние)



По известным перемещениям определяем напряжения

$$\sigma_x = \frac{M_x}{h^2/12}z, \quad \sigma_x^{\max} = \frac{6M_x}{h^2}, \quad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{h^2/12}z, \quad \sigma_y^{\max} = \frac{6M_y}{h^2}, \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

($z \in [-h/2,\ h/2]$ – координата, отсчитываемая от срединной поверхности пластины).

В общем случае в каждом узле имеется 6 степеней свободы (3 линейных перемещения и 3 поворота), но для конкретной задачи какие-то из них могут оказаться не нужны. Например, при решении задачи о деформировании плоской рамы, нагруженной силами в своей плоскости, можно сразу отказаться от базисных функций, описывающих перемещения из плоскости рамы, поскольку эти перемещения равны нулю. Указание, какие именно базисные функции используются в конкретной задаче, в программах МКЭ делается с помощью **типа элемента**. Описание типа включает топологию элемента (плоский треугольник, плоский четырехугольник, четырехугольник с криволинейными сторонами, объемный элемент – тетраэдр, 6-гранник и т.п.). В каждом пакете МКЭ содержится заранее заданный набор типов элементов – библиотека КЭ, из которой пользователь выбирает необходимый ему для данной задачи тип.

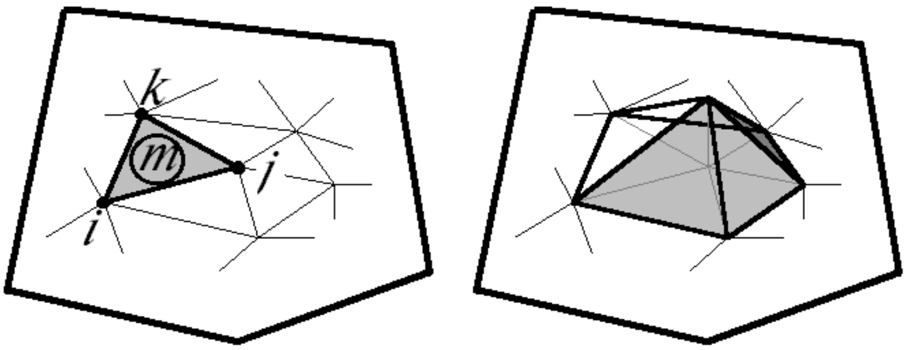
Использование типов элементов, определенных заранее и внесенных в библиотеку конкретного пакета МКЭ, требует аккуратности при моделировании конструкции: поля перемещений, которые могут быть описаны с помощью линейных комбинаций базисных функций, должны

удовлетворять условиям совместности деформаций и наложенным на конструкцию связям.
Совместность деформаций требует непрерывности поля перемещений в конструкции, что накладывает ограничения на разбиение конструкции на конечные элементы. Так например, если базисные функции $\boldsymbol{w_j}$, $j = 1...N$ кусочно-линейны и удовлетворяют условиям

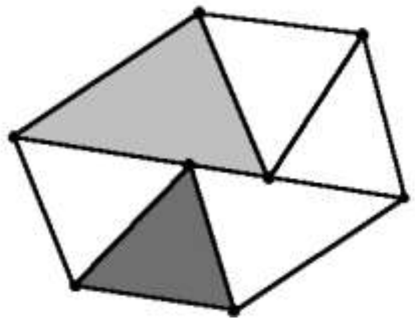
$$w_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases},$$

то для того, чтобы поле перемещений $\boldsymbol{w\ (x,y)}$ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы соседние элементы имели совпадающие вершины.

КЭ с совпадающими вершинами. Непрерывная базисная функция



Если узел одного элемента лежит на стороне другого, но не совпадает с его вершиной, базисная функция не будет непрерывной, несмотря на то, что конечные элементы заполняют всю конструкцию без пустот. С физической точки зрения эта ситуация эквивалентна наличию разрыва (трещины) в конструкции.



Математическая основа МКЭ накладывает ограничения на класс решаемых задач. Так, использование метода Ритца (в показанной выше форме) требует существования потенциальной функции $\boldsymbol{\Pi = V + U}$; при этом задачи, в которых силы не отвечают условию существования потенциала (например, некоторые задачи аэроупругости) не могут быть решены. Метод Бубнова-

Галеркина свободен от этого ограничения (хотя и несколько более сложен в реализации). Прежде чем применять тот или иной пакет, пользователь должен выяснить особенности задачи и возможность ее решения с помощью рассматриваемого пакета.